01/11/2016

Μάθημα 9ο

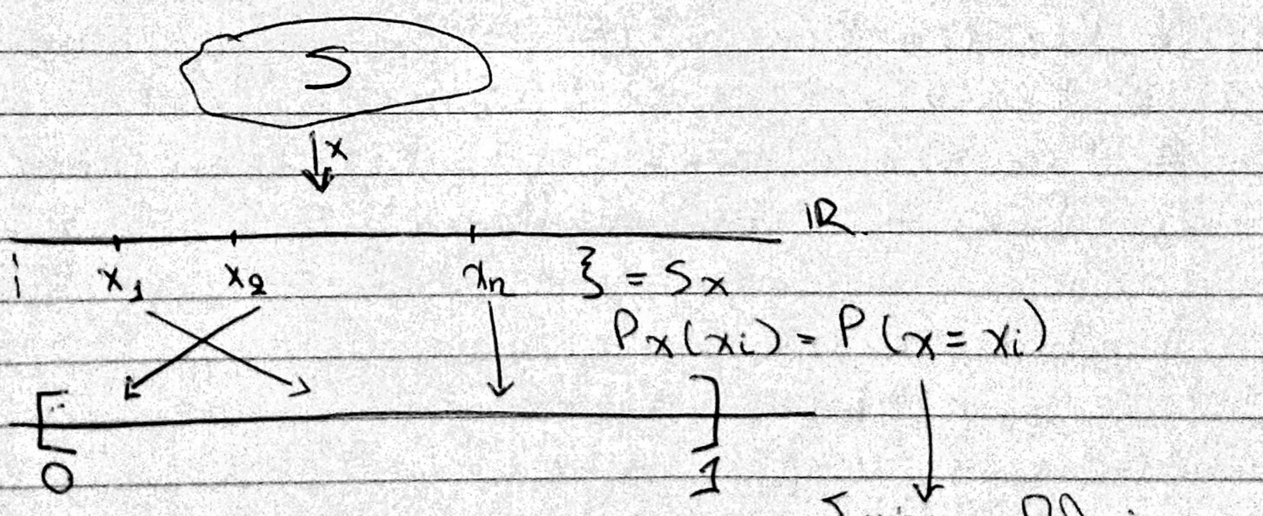
Πιθανότητες

Διακριτή τ.μ. – Συνάρτηση Πιθανότητας (σ.π.)

Τυχαία Μεταβλητή → Διακριτές / Συνεχείς → Ανάλογα με τις τιμές τις οποίες μπορούν να πάρουν

Ορισμός

Μια τυχαία μεταβλητή λέγεται διακριτή αν το σύνολο τιμών της είναι το πολύ αριθμήσιμο.



Ορισμός

Έστω x μια τυχαία διακριτή τ.μ. με σύνολο τιμών $S_x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Η συνάρτηση $P_x : S_x \to [0,1]$ και ορίζεται $P_x(x_i) = P(x = x_i)$, $i = 1, 2, \dots$ ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) της τυχαίας μεταβλητής x.

Παράδειγμα

Νόμισμα με $P(K)=3/8$ $P(\Gamma)=5/8$ ρίχνεται μέχρι να εμφανιστεί Κ ή τρία Γ. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των απαιτούμενων ρίψεων.

Λύση

Έστω X: αριθμός απαιτούμενων ρίψεων

Το X διέπεται από τυχαιότητα και είναι τυχαία μεταβλητή.

Θα βρούμε τον δειγματικό χώρο.

$$S = \{K, K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$$

Δυνατές τιμές τ.μ. X : $x = 1, 2, 3$.

Συνεπώς, παίρνει μετρούμενες διακριτές τιμές πεπερασμένου πλήθους, άρα η τ.μ. X είναι διακριτή.

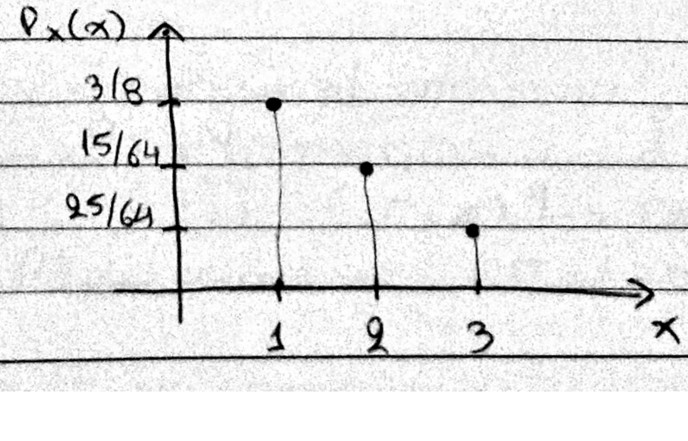
$P_X(1) \overset{ορ}{=} P(X=1) = P(K) = 3/8$

$P_X(2) \overset{ορ}{=} P(X=2) = P(\Gamma K) \overset{ανεξ.}{=} P(\Gamma)\cdot P(K) = 15/64$

$P_X(3) \overset{ορ}{=} P(X=3) = P(\Gamma\Gamma K \text{ ή } \Gamma\Gamma\Gamma) = P(\Gamma\Gamma K) + P(\Gamma\Gamma\Gamma) \overset{ανεξ.}{=}$
$P(\Gamma)\cdot P(\Gamma)\cdot P(K) + P(\Gamma)\cdot P(\Gamma)\cdot P(\Gamma) = \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8} = \frac{25}{64}$

Άρα, η κατανομή (σ.π.) είναι η εξής:

$$P_X(x) = \begin{cases} 3/8 &, x=1 \\ 15/64 &, x=2 \\ 25/64 &, x=3 \\ 0 &, \text{για κάθε άλλο } x. \end{cases}$$



Ένα τέτοιο διάγραμμα το λέμε ραβδόγραμμα.

(*) Αν προσθέσω $P_X(1) + P_X(2) + P_X(3) = 1$ και είναι λογικό να μου βγει 1. Ισχύει $\sum_x P_X(x) = 1$.
($P_X(x)$ είναι μη αρνητική)

Πρόταση (Ιδιότητες της σ.π.)

Έστω X μια διακριτή τ.μ. με σ.π. $P_X(x)$, τότε:

① $P_X(x) \geq 0$ $\forall$ τιμή x της τ.μ. X.

② $\sum_x P_X(x) = 1$.

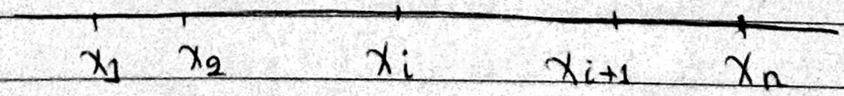
Οι (1), (2) είναι οι συνθήκες οι οποίες θα πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση ώστε να είναι (σ.π.).

Σχέση μεταξύ α.σ.κ. και σ.π.

Έστω διακριτή τ.μ. X με γνωστή σ.π. $P_X(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots$ όπου $x_1, x_2, \dots, x_n$ οι τιμές της διακριτής X.
Μπορώ να βρω την α.σ.κ. F_X του X;

Απόδειξη.

Έστω F_X η α.σ.κ. της διακριτής X. Αφού F_X είναι α.σ.κ. ορίζεται $F_X(x) = P(X \leq x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



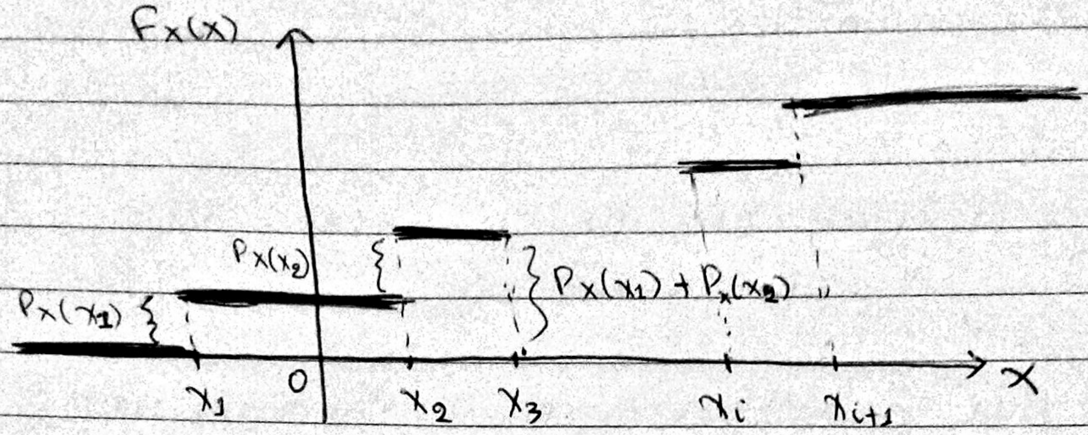
Αν $x < x_1$ τότε $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$

Αν $x_1 \leq x < x_2$ τότε $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P(X = x_1) = P_X(x_1)$

Αν $x_2 \leq x < x_3$ τότε $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P(X = x_1 \text{ ή } X = x_2) =$
$P(X = x_1) + P(X = x_2) = P_X(x_1) + P_X(x_2)$

Έστω $x_i \leq x < x_{i+1}$ τότε $F_X(x) = P(X \leq x) =$
$= P(X = x_1 \text{ ή } X = x_2 \text{ ή } \dots \text{ ή } X = x_i) =$
$= P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(x_i) = P_X(x_1) + P_X(x_2) + \dots + P_X(x_i) =$
$= \sum_{x_i \in X} P_X(x_i)$

Γενικά $F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} P_X(x_i)$, $\forall x \in \mathbb{R}$



Παρατήρηση

Η α.σ.κ. μιας διακριτής τ.μ. είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση (step function) που παρουσιάζει άλματα στα σημεία x_i που είναι τιμές της διακριτής τ.μ. X και τα άλματα είναι ίσα με τη πιθανότητα των τιμών αυτών.

② Είναι διακριτή τ.μ. X με τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και γνωστή α.σ.κ. F_X. Μπορώ να βρω την σ.π. P_X ?

Αφού X διακριτή, για να βρω την P_X αρκεί να μπορώ να βρω $P(X = x_i)$ $i = 1, 2, \ldots$ αφού

$P_X(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$

$$P_X(x_i) = P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i -) =$$
$$= F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) \quad i = 1, 2, \ldots$$

Παράδειγμα

Έστω διακριτή τμ. X με σ.κ.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ 1/2 & , 0 \leq x < 1 \\ 3/5 & , 1 \leq x < 2 \\ 4/5 & , 2 \leq x < 3 \\ 9/10 & , 3 \leq x < 7/2 \\ 1 & , 7/2 \leq x \end{cases}$$

Να προσδιοριστεί η P_X.

Λύση

Οι τιμές του X είναι τα σημεία στα οποία αλλάζει τιμή η F_X δηλαδή τα $0, 1, 2, 3, 7/2$. Για να βρω την σ.π. αρκεί να βρω $P_X(x) = P(X=x)$, $x = 0, 1, 2, 3, 7/2$

$P_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$

$P_X(0) = F_X(0) - F_X(0-) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

$P_X(1) = F_X(1) - F_X(0) = 3/5 - 1/2 = 1/10$

$P_X(2) = F_X(2) - F_X(1) = 4/5 - 3/5 = 1/5$

$P_X(3) = F_X(3) - F_X(2) = 9/10 - 4/5 = 1/10$

$P_X(7/2) = F_X(7/2) - F_X(5/2) = 1 - 9/10 = 1/10$

$$P_X(x) = \begin{cases} 1/2 & , x=0 \\ 1/10 & , x=1 \\ 1/5 & , x=2 \\ 1/10 & , x=3 \\ 1/10 & , x=7/2 \end{cases}$$

Είναι η P_X σ.π.;

Ναι γιατί $P_X \geq 0$

$\sum_{x=0,1,2,3,7/2} P_X(x)$